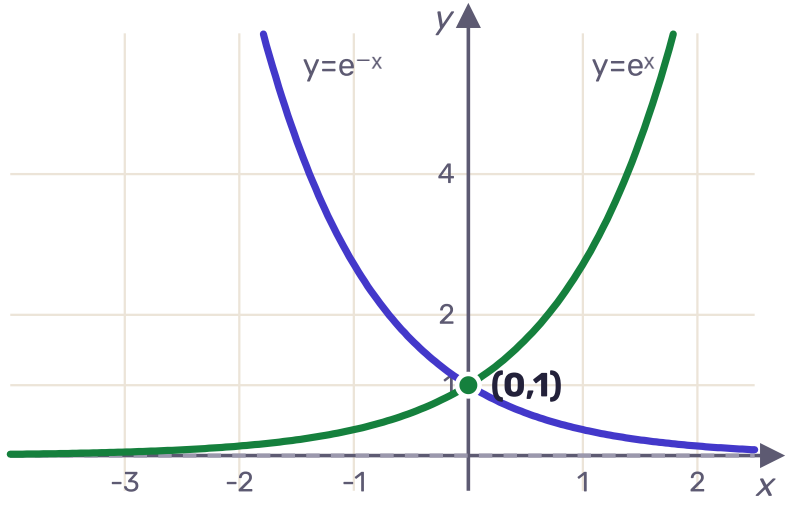
פונקציות מעריכיות

מצגת הסבר – חקירת פונקציות עם e^x, נגזרת ואינטגרל

מתמטיקה 4 יח"ל | שאלון 35472 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע"י עדי והבינה

מה נלמד?



בשאלה נותנים פונקציה כמו $f(x)=(3x^2-a)e^x$ ומבקשים לחקור אותה:

1. למצוא **פרמטר** מנתון (קיצון, שיפוע משיק)
2. תחום הגדרה ונקודות חיתוך עם הצירים
3. נקודות **קיצון** ותחומי עלייה וירידה
4. **אסימפטוטה** וסקיצה
5. גרף של $|f(x)|$ או $f'(x)$, **ושטח** בעזרת אינטגרל

הרעיונות החשובים

e^x תמיד חיובי

לכל x: $e^x > 0$, וגם $e^{2x-1} > 0$.

לכן במכפלה $(10-4x)\cdot e^{2x-1}=0$ רק הגורם $10-4x$ יכול להתאפס, וסימן הנגזרת נקבע לפי הגורם השני.

אסימפטוטה $y=0$

כאשר $x \to -\infty$: $e^x \to 0$.

גם $(3x^2-9)e^x \to 0$ – החזקה „מנצחת" את הפולינום. לכן הישר $y=0$ אסימפטוטה אופקית **משמאל**.

חיתוך עם ציר y

מציבים $x=0$ וזוכרים: $e^0=1$.

$$f(0)=(0-9)\cdot e^0=-9$$

e הוא מספר

$e \approx 2.718$. בתשובה כותבים ערך מדויק ($\frac{18}{e^3}$) ואז מקורב (≈ 0.9).

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • נגזרות

$$(e^x)' = e^x$$

$$\left[e^{f(x)}\right]' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

נגזרת של מכפלת פונקציות:

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

נגזרת של מנת פונקציות:

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

נוסחאון • אינטגרלים ($m \neq 0$)

$$\int e^x \, dx = e^x + C$$

$$\int e^{mx+b} \, dx = \frac{e^{mx+b}}{m} + C$$

לזכור (לא בנוסחאון):

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$$

$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$ (חזקה שלילית – מהנוסחאון: $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$)

שיטת הפתרון – חקירה שלב אחרי שלב

1. **תחום הגדרה**: e^x מוגדר לכל x. בשבר – פוסלים את מה שמאפס את המכנה.
2. **חיתוך**: $x=0$ ← ציר y. $f(x)=0$ ← ציר x (רק הגורם שאינו e).
3. **נגזרת** (כלל המכפלה) ← מוציאים e^x כגורם משותף.
4. $f'(x)=0$ ← **טבלת סימנים** ← סוג הקיצון, עלייה וירידה.
5. מציבים ב־f (לא ב־f'!) כדי למצוא את ה־y של הקיצון.
6. **אסימפטוטה** וסקיצה; בסוף – **שטח** באינטגרל.

דוגמה: מוציאים גורם משותף

$$f'(x)=6x\cdot e^x+\left(3x^2-9\right)e^x$$
$$=\left(3x^2+6x-9\right)e^x$$
$$=3(x+3)(x-1)e^x$$

$e^x>0$ ← $f'=0$ כאשר $x=-3$ או $x=1$.

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 4

שאלת בגרות פתורה – מציאת הפרמטר (א)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

נתונה הפונקציה $f(x)=\left(3x^2-a\right)e^x$. ל־$f(x)$ יש נקודת קיצון שבה $x=1$. **א.** מצאו את a.

נגזרים לפי כלל המכפלה:

$$f'(x)=6x\cdot e^x+\left(3x^2-a\right)e^x$$

$$f'(x)=\left(3x^2+6x-a\right)e^x$$

בנקודת קיצון הנגזרת מתאפסת: $f'(1)=0$

$$\left(3+6-a\right)e^1=0$$

$e^1\neq 0$, לכן:

$$9-a=0\ \Rightarrow\ a=9$$

$$a=9$$

שאלת בגרות פתורה – נקודות קיצון (ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

ב. מצאו את שיעורי נקודות הקיצון של $f(x)$ וקבעו את סוגן.

$$f'(x)=3(x+3)(x-1)e^{x}=0$$

$$x=-3 \quad \text{או} \quad x=1$$

x	$x<-3$	-3	$-3<x<1$	1	$x>1$
f'	+	0	−	0	+
f	↗	max	↘	min	↗

מציבים ב־$f(x)=\left(3x^{2}-9\right)e^{x}$:

$$f(-3)=(27-9)e^{-3}=\frac{18}{e^{3}}\approx 0.9$$

$$f(1)=(3-9)e=-6e\approx -16.31$$

$$\max\left(-3,\ \tfrac{18}{e^{3}}\right)$$

$$\min\left(1,\ -6e\right)$$

שאלת בגרות פתורה – חיתוך וסקיצה (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

ג חיתוך עם ציר y: $f(0) = (0-9)\cdot e^0 = -9$

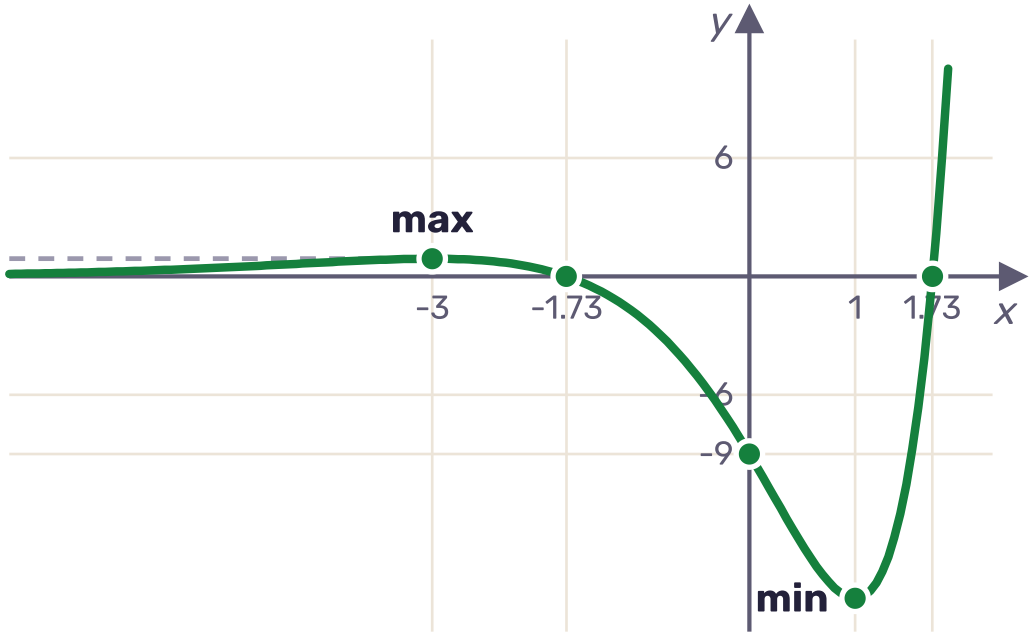
חיתוך עם ציר x: $e^x > 0$, לכן

$$3x^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{3}$$

$(0,-9)$, $(\pm\sqrt{3},\ 0)$

ד כאשר $x \to -\infty$: $f(x) \to 0$ מלמעלה ← אסימפטוטה $y = 0$ משמאל.

כאשר $x \to \infty$: $f(x) \to \infty$.



שאלת בגרות פתורה – הגרף של $|f(x)|$ (ה)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 4

ה. נתונה $g(x)=|f(x)|$. (1) זהו את הגרף שלה. (2) מצאו את נקודות הקיצון שלה.

1. מה שמעל ציר x **נשאר**.
2. מה שמתחת לציר x **משתקף** כלפי מעלה.
3. המינימום $(1,-6e)$ הופך למקסימום $(1,\ 6e)$ – שיא גבוה **מימין** לציר y.
4. בנקודות החיתוך $g=0$ – הערך הקטן ביותר של ערך מוחלט ← **מינימום**.

(1) גרף IV

(2) מקסימום:

$$\left(-3,\ \frac{18}{e^3}\right),\ \ (1,\ 6e)$$

מינימום:

$$\left(-\sqrt{3},\ 0\right),\ \ \left(\sqrt{3},\ 0\right)$$

שאלת בגרות פתורה – שיפוע משיק (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 4

א $f(x)=(a-4x)\cdot e^{2x-1}$. שיפוע המשיק בנקודה שבה $x=0$ הוא $\frac{16}{e}$. מצאו את a.

הנגזרת של e^{2x-1} היא $2e^{2x-1}$:

$$f'(x)=-4e^{2x-1}+(a-4x)\cdot 2e^{2x-1}$$

$$f'(x)=e^{2x-1}(2a-4-8x)$$

$$f'(0)=\frac{2a-4}{e}=\frac{16}{e}\ \Rightarrow\ a=10$$

ב חיתוך עם הצירים, וקיצון.

$$f(0)=10\cdot e^{-1}=\frac{10}{e}$$

$$10-4x=0\ \Rightarrow\ x=2.5$$

$$f'(x)=e^{2x-1}(16-8x)=0\ \Rightarrow\ x=2$$

משמאל ל־2: $f'>0$, מימין: $f'<0$ ← מקסימום.

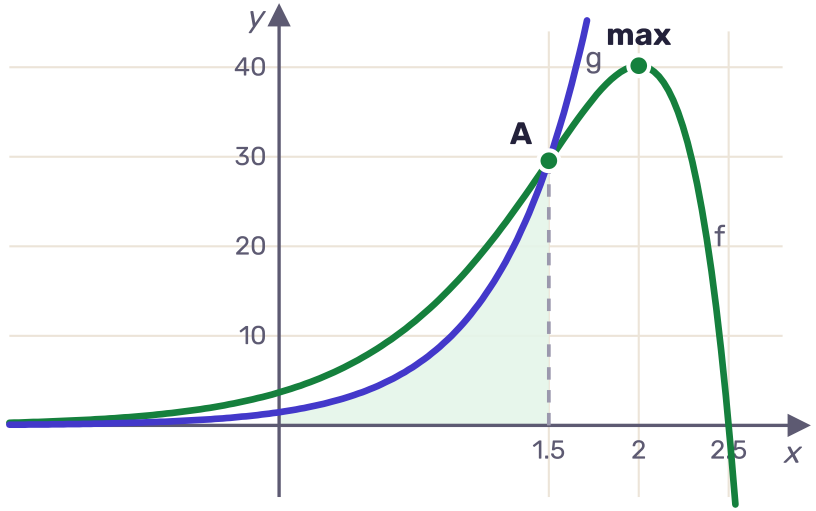
$$f(2)=(10-8)e^{3}=2e^{3}\approx 40.17$$

$$\max\left(2,\ 2e^{3}\right)$$

שאלת בגרות פתורה – נקודת חיתוך ושטח (ד–ו)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד א' • שאלה 4

$g(x)=4e^{2x-1}$. **ד.** הסבירו למה $g(x)>0$. **ה.** מצאו את A – נקודת החיתוך של f ו־g.
ו. חשבו את השטח מתחת ל־g, בין ציר y לאנך מ־A.



ד. $4>0$ ו־$e^{2x-1}>0$ ← המכפלה חיובית.

ה. מחלקים ב־$e^{2x-1}\neq 0$:

$$10-4x=4 \;\Rightarrow\; x=1.5,\quad g(1.5)=4e^{2}$$

ו.

$$S=\int_{0}^{1.5}4e^{2x-1}\,dx=\left[2e^{2x-1}\right]_{0}^{1.5}$$

$$S=2e^{2}-\frac{2}{e}\approx 14.04$$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. $\left(e^{2x-1}\right)' = 2e^{2x-1}$ – לא שוכחים את הנגזרת הפנימית.
2. למשוואה $e^x = 0$ **אין פתרון** (התשובה איננה $x = 0$).
3. $e^0 = 1$, לא 0.
4. את ה־y של הקיצון מציבים ב־f, לא ב־f'.
5. $\int e^{2x-1}dx = \frac{1}{2}e^{2x-1}$ – מחלקים ב־m.
6. אסימפטוטה $y = 0$ רק **בצד אחד** – בודקים איפה $e^x \to 0$.

בדיקה עצמית

1. גזרו: $f(x) = x \cdot e^x$.
2. מצאו את נקודת הקיצון של $f(x) = x \cdot e^x$ וקבעו את סוגה.
3. פתרו: $(x-5) \cdot e^x = 0$.
4. חשבו: $\int_0^1 e^{2x}\,dx$.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (\mathbf{x+1})\mathbf{e^x}$
2. $x = -1$: משמאל $f' < 0$, מימין $f' > 0$ ← $\min\left(-1,\ -\frac{1}{e}\right)$
3. $e^x > 0 \leftarrow x - 5 = 0 \leftarrow \mathbf{x = 5}$
4. $\left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1 = \frac{e^2-1}{2} \approx \mathbf{3.19}$