גדילה ודעיכה

מצגת הסבר – אחוז קבוע בכל יחידת זמן, מציאת q ומציאת t

מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35472 | תכנית חדשה

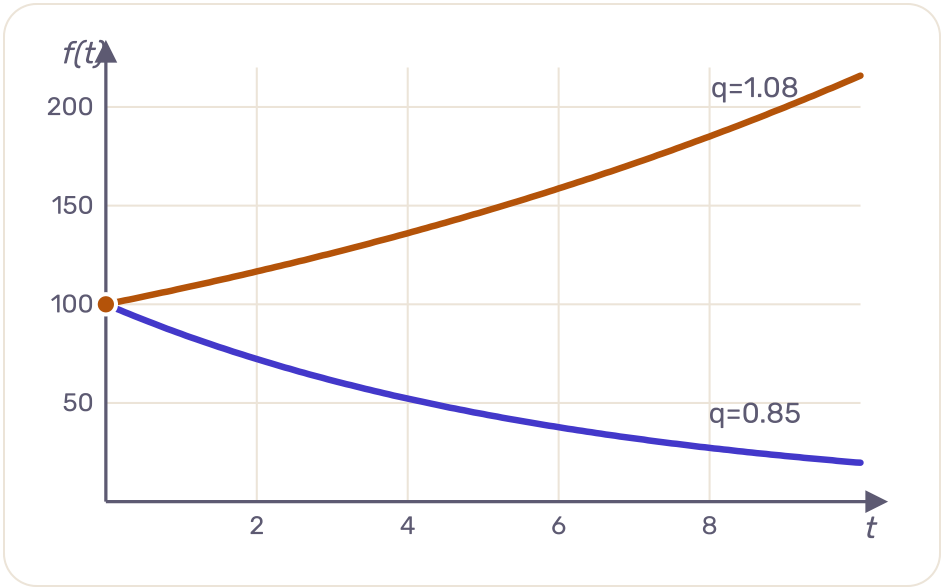
האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

כמות שגדלה או קטנה **באחוז קבוע** בכל יחידת זמן: אוכלוסייה, חיסכון בבנק, צמחים, פינגווינים.

בכל שאלה מחפשים אחד משלושה דברים:

1. **הכמות** אחרי זמן נתון – $f(t)$
2. **האחוז** – דרך המנה q (בעזרת שורש)
3. **הזמן** – t (בעזרת לוגריתם)



הרעיון: מקדם הגדילה q

גדילה ב־$p\%$

בכל יחידת זמן הכמות נעשית $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ ממה שהייתה.

גדל ב־5%	$q=1.05$
גדל ב־2%	$q=1.02$
גדל ב־10%	$q=1.1$

$q>1$ ← הגרף **עולה**.

דעיכה ב־$p\%$

בכל יחידת זמן הכמות נעשית $\left(1-\frac{p}{100}\right)$ ממה שהייתה.

קטן ב־5%	$q=0.95$
קטן ב־8%	$q=0.92$
נשארו 53%	$q^5=0.53$

$0<q<1$ ← הגרף **יורד**.

ומהכיוון ההפוך: $q=0.93$ ← ירידה של $1-0.93=0.07$, כלומר **7%**. $q=1.12$ ← עלייה של 12%.

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • גדילה ודעיכה

הכמות לאחר t יחידות זמן:

$$f(t) = f(0) \cdot q^t$$

q – מקדם הגדילה / הדעיכה

$$q = 1 \pm \frac{p}{100}$$

p – אחוז הגדילה / הדעיכה ביחידת זמן

נוסחאון • לוגריתמים

$\log_a x = b$ שקול ל־ $a^b = x$

$$\log_a\left(x^b\right) = b \cdot \log_a x$$

לזכור (לא בנוסחאון): מוציאים ℓn (או log) משני האגפים:

$$q^t = k \;\Rightarrow\; t = \frac{\ell n\, k}{\ell n\, q}$$

שיטת הפתרון – שלב אחרי שלב

1. קובעים את **יחידת הזמן** (שנים, שבועות...) ואת $t = 0$.
2. רושמים $f(0)$ ואת q (או לא ידוע).
3. בונים משוואה מהנתון: $f(0) \cdot q^t = \ldots$
4. חסר q ← מבודדים q^t ומוציאים **שורש** מסדר t.
   חסר t ← מבודדים q^t ומוציאים ℓn.
5. מתרגמים את q חזרה לאחוז, ועונים במילים.

שני הכלים

חסר q:

$$q^5 = 0.53 \;\Rightarrow\; q = \sqrt[5]{0.53} \approx 0.881$$

חסר t:

$$1.02^t = 1.17 \;\Rightarrow\; t = \frac{\ell n\, 1.17}{\ell n\, 1.02} \approx 7.93$$

שאלת בגרות פתורה – פינגווינים (א)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

באזור A מספר הפינגווינים קטן בכל שנה באחוז קבוע, מתחילת 2000. **א.** האם ההפרש בין 2000 ל־2001 שווה להפרש בין 2001 ל־2002? נמקו.

נסמן M_0 – המספר בתחילת 2000, ו־q – מנת הדעיכה ($0 < q < 1$).

$$M_0 - M_0 q = M_0(1-q)$$

$$M_0 q - M_0 q^2 = M_0 q(1-q)$$

ההפרש השני = ההפרש הראשון **כפול** q.

כי $q < 1$ ← ההפרש השני **קטן** מהראשון.

לא – ההפרשים לא שווים

בכל שנה יורד אותו **אחוז**, אבל מכמות שהולכת וקטנה.

שאלת בגרות פתורה – פינגווינים (ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

בתחילת 2000: באזור A 253,000 פינגווינים (ירידה של 5% בשנה), ובאזור B 313,000. בתחילת 2010 המספרים שווים. **ב.** בכמה אחוזים קטן המספר באזור B בכל שנה?

באזור A: $q_A = 0.95$, אחרי 10 שנים:

$$253{,}000 \cdot 0.95^{10} \approx 151{,}480$$

באזור B המנה q לא ידועה. בתחילת 2010 – שוויון:

$$313{,}000 \cdot q^{10} = 253{,}000 \cdot 0.95^{10}$$

$$q^{10} = \frac{253{,}000 \cdot 0.95^{10}}{313{,}000} \approx 0.484$$

$$q = \sqrt[10]{0.484} \approx 0.93$$

$$1 - 0.93 = 0.07$$

ירידה של 7% בכל שנה

שאלת בגרות פתורה – פינגווינים (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 3

ג כעבור כמה זמן מתחילת 2000 היו באזור B 98,000 פינגווינים?

$$313{,}000 \cdot 0.93^t = 98{,}000$$

$$0.93^t = \frac{98{,}000}{313{,}000} \approx 0.3131$$

מוציאים ℓn לשני האגפים:

$$t = \frac{\ell n\, 0.3131}{\ell n\, 0.93} \approx 16$$

כעבור 16 שנים

ד מתחילת 2018 המספר באזור A **גדל** ב־2% בשנה. כעבור כמה זמן יגדל ב־17%?

גדל ב־17% ← הגיע ל־1.17 מהמספר בתחילת 2018:

$$M_0 \cdot 1.02^t = 1.17\, M_0$$

$$1.02^t = 1.17$$

$$t = \frac{\ell n\, 1.17}{\ell n\, 1.02} \approx 7.93$$

כ־7.93 שנים

שאלת בגרות פתורה – שתי משתלות (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 3

א

משתלה א': 600 צמחים, גדל ב־5% בשבוע. משתלה ב': a צמחים, גדל ב־10% בשבוע. כעבור זמן מסוים המספרים שווים. איזו טענה נכונה: $a < 600$ או $a > 600$?

משתלה ב' גדלה מהר יותר. אילו $a \geq 600$ – היא הייתה תמיד גדולה יותר, והמספרים לא היו משתווים.

$$a < 600$$

ב

כעבור 17 שבועות, במשתלה ב' פי 2 צמחים ממשתלה א'. מצאו את a.

$$A(t) = 600 \cdot 1.05^{t}$$

$$B(t) = a \cdot 1.1^{t}$$

$$a \cdot 1.1^{17} = 2 \cdot 600 \cdot 1.05^{17}$$

$$a = 1200 \cdot \left(\frac{1.05}{1.1}\right)^{17} \approx 544$$

$$a \approx 544$$

שאלת בגרות פתורה – שתי משתלות (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 3

ג אחרי 17 שבועות מתחילה מכירה. במשתלה ב' המספר קטן באחוז קבוע, ואחרי 5 שבועות נשארו 53%. בכמה אחוזים קטן בכל שבוע?

$$B_0 \cdot q^5 = 0.53\,B_0$$

$$q = \sqrt[5]{0.53} \approx 0.88076$$

$$1 - 0.88076 \approx 0.119$$

כ־12% בכל שבוע

ד במשתלה א' המספר קטן ב־8% בשבוע. מתי המספרים יהיו שווים?

בתחילת המכירה בב' פי 2 מבא' (t – שבועות מתחילת המכירה):

$$600 \cdot 1.05^{17} \cdot 0.92^t = 1200 \cdot 1.05^{17} \cdot 0.88076^t$$

$$\left(\frac{0.92}{0.88076}\right)^t = 2$$

$$t = \frac{\log 2}{\log \frac{0.92}{0.88076}} \approx 15.9$$

כעבור כ־16 שבועות

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. ירידה ב־7% ← $q = 0.93$, **לא** $q = 0.07$.
2. „גדל ב־17%" ← $q^t = 1.17$ (לא 17 ולא 0.17).
3. „נשארו 53%" ← $q^5 = 0.53$.
4. בכל שנה יורד אותו **אחוז** – לא אותו **מספר** (ההפרשים קטנים).
5. שומרים על **יחידת הזמן** של השאלה (שבועות ≠ ימים).
6. לא מעגלים באמצע: משאירים $\sqrt[5]{0.53}$ במחשבון, ומעגלים רק בסוף.

בדיקה עצמית

1. בחיסכון 5,000 ש״ח, והוא גדל ב־4% בשנה. כמה כסף יהיה בו אחרי 3 שנים?
2. כמות קטנה ב־15% בכל שעה. מהו q?
3. אחרי שנתיים נשארו 64% מכמות התרופה בדם. בכמה אחוזים קטנה הכמות בכל שנה?
4. כמות גדלה ב־5% ביום. אחרי כמה ימים היא תוכפל?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $5000 \cdot 1.04^3 = \mathbf{5624.32}$ ש״ח
2. $q = 1 - 0.15 = \mathbf{0.85}$
3. $q^2 = 0.64 \Rightarrow q = 0.8$ ← ירידה של **20%**
4. $1.05^t = 2 \Rightarrow t = \dfrac{\ell n\, 2}{\ell n\, 1.05} \approx \mathbf{14.2}$ ימים