פונקציות לוגריתמיות

מצגת הסבר – חקירת פונקציות עם $\ell n\, x$, נגזרת ושטח

מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35472 | תכנית חדשה

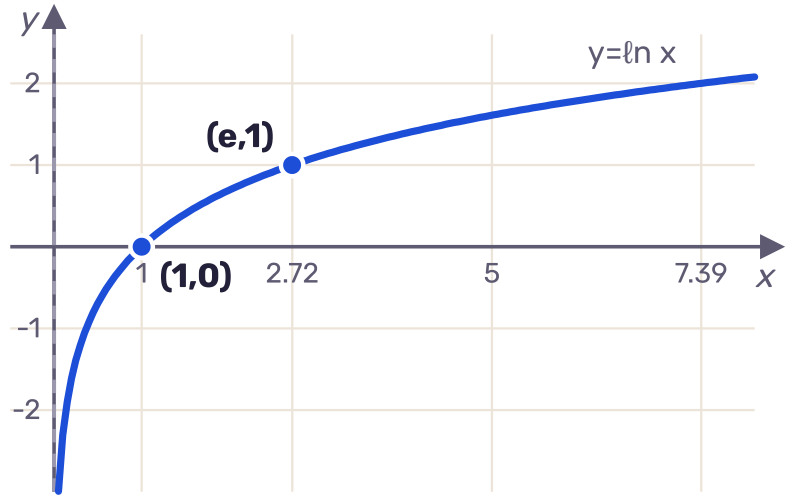
האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

בשאלה נותנים פונקציה עם $\ell n\, x$ – למשל $f(x)=\dfrac{x^2}{-6+4\,\ell n\, x}$ –

וחוקרים אותה:

1. **תחום הגדרה** ואסימפטוטה אנכית
2. נקודות חיתוך עם הצירים
3. נגזרת, **קיצון**, עלייה וירידה
4. זיהוי הגרפים של $f(x)$ ושל $f'(x)$
5. **שטח** מתחת לגרף הנגזרת



הרעיונות החשובים

מוגדר רק לחיובי

$\ell n\, x$ מוגדר רק עבור $x > 0$.

לכן אין חיתוך עם ציר y (כי $x = 0$ לא בתחום), ובשבר בודקים גם שהמכנה שונה מ־0.

מעבר בין ℓn לחזקה

$$\ell n\, x = k \;\Leftrightarrow\; x = e^{k}$$

למשל $\ell n\, x = 2 \;\Rightarrow\; x = e^{2}$, $\ell n\, x = -2 \;\Rightarrow\; x = e^{-2}$

ערכים שכדאי לזכור

$$\ell n\, 1 = 0, \quad \ell n\, e = 1, \quad \ell n\, e^{k} = k$$

$\ell n\, x = \log_e x$ – לוגריתם לפי בסיס e.

$\ell n\, x = 0$

קורה רק כאשר $x = 1$. $(\ell n\, x)^2 = 0 \leftarrow$ גם $x = 1$.

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • לוגריתמים

$$a^{\log_a x} = x \qquad \log_a\left(a^b\right) = b$$

$\log_a x = b$ שקול ל- $a^b = x$

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(x \cdot y)$$

$$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$$

$$\log_a\left(x^b\right) = b \cdot \log_a x$$

נוסחאון • נגזרות ואינטגרלים

$$(\ell n\, x)' = \frac{1}{x}$$

$$[\ell n\,(f(x))]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ell n|x| + C$$

$$\int \frac{1}{mx+b}\, dx = \frac{\ell n|mx+b|}{m} + C$$

וגם כללי המכפלה והמנה (בנוסחאון).

שיטת הפתרון – חקירה שלב אחרי שלב

1. **תחום**: מה שבתוך ℓn חיובי, והמכנה שונה מ־0.
2. מכנה מתאפס (והמונה לא) ← **אסימפטוטה אנכית**.
3. **חיתוך**: $f(x)=0$ – רק פתרונות שבתחום!
4. **נגזרת** (מכפלה / מנה), ומפרקים לגורמים.
5. $f'(x)=0 \leftarrow \ell n\,x=k \leftarrow x=e^{k}$ ← טבלת סימנים.
6. שטח מתחת ל־f': **הקדומה של f' היא f**.

דוגמה: תחום

$$f(x)=\frac{x^{2}}{-6+4\,\ell n\,x}$$

$\ell n\,x$ ← $x>0$. המכנה שונה מ־0:

$$-6+4\,\ell n\,x\neq 0$$

$$\ell n\,x\neq 1.5 \;\Rightarrow\; x\neq e^{1.5}$$

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

שאלת בגרות פתורה – תחום, אסימפטוטה וחיתוך (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

א

$f(x)=\dfrac{x^2}{-6+4\,\ell n\,x}$. (1) מצאו את תחום ההגדרה. (2) מצאו את האסימפטוטה האנכית.

(1) $x>0$, וגם $x\neq e^{1.5}$ (מהשקף הקודם).

(2) ב-$x=e^{1.5}$ המכנה מתאפס, והמונה $x^2=e^3\neq 0$:

$$x=e^{1.5}\approx 4.48$$

ב

מצאו את נקודות החיתוך עם הצירים.

ציר y: $x=0$ אינו בתחום ← אין.

ציר x: $f(x)=0$ רק כשהמונה מתאפס:

$$x^2=0\ \Rightarrow\ x=0$$

אבל $x=0$ לא בתחום.

אין נקודות חיתוך

שאלת בגרות פתורה – קיצון (ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

כלל המנה:

$$f'(x)=\frac{2x\left(-6+4\,\ell n\,x\right)-x^2\cdot\frac{4}{x}}{\left(-6+4\,\ell n\,x\right)^2}$$

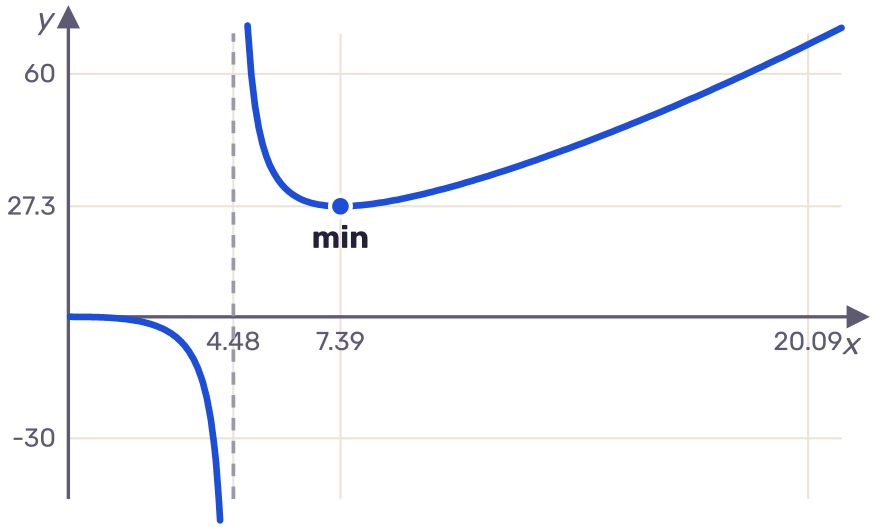
$$f'(x)=\frac{8x\left(\ell n\,x-2\right)}{\left(-6+4\,\ell n\,x\right)^2}$$

המכנה חיובי, ו־$8x>0$ בתחום:

$$\ell n\,x=2\ \Rightarrow\ x=e^2$$

x	$0<x<e^{1.5}$	$e^{1.5}<x<e^2$	e^2	$x>e^2$
f'	−	−	0	+
f	↘	↘	min	↗

$$f\left(e^2\right)=\frac{e^4}{-6+4\cdot 2}=\frac{e^4}{2}\approx 27.3$$



$$\min\left(e^2,\ \frac{e^4}{2}\right)$$

שאלת בגרות פתורה – שטח מתחת לגרף הנגזרת (ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 5

ד (2). חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף $f'(x)$, ציר ה־x והישר $x = e^3$.

f' מתאפסת ב־$x = e^2$ וחיובית אחריה ← השטח בין e^2 ל־e^3, מעל ציר x.

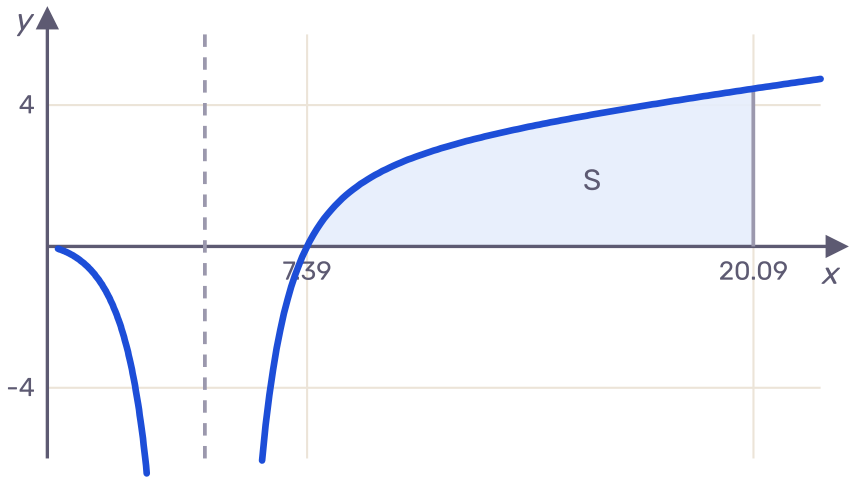
הפונקציה הקדומה של $f'(x)$ היא $f(x)$:

$$S = \int_{e^2}^{e^3} f'(x)\,dx = f\left(e^3\right) - f\left(e^2\right)$$

$$f\left(e^3\right) = \frac{e^6}{-6 + 4 \cdot 3} = \frac{e^6}{6}$$

$$S = \frac{e^6}{6} - \frac{e^4}{2} \approx 39.94$$

כ־39.94 יחידות שטח



לא צריך למצוא אינטגרל „קשה" – את f כבר יש לנו!

שאלת בגרות פתורה – זיהוי גרף הנגזרת (א)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5

$f(x)=3x\cdot(\ell n\,x)^2$. לפונקציה מקסימום אחד ומינימום אחד, והמינימום **מימין** למקסימום. **א.** איזה גרף מתאר את $f'(x)$?

1. עולה עד המקסימום ← $f'>0$
2. יורדת עד המינימום ← $f'<0$
3. שוב עולה ← $f'>0$

סדר הסימנים של f' משמאל לימין:

$$+\quad -\quad +$$

הגרף של f' חותך את ציר x **פעמיים** ומחליף סימן בכל פעם.
גרף שרק **משיק** לציר – בלי החלפת סימן – אין שם קיצון.

גרף II

שאלת בגרות פתורה – חיתור וקיצון (ב)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5

ב1 חיתור עם הצירים.

ציר y: $x=0$ לא בתחום $(x>0)$ ← אין.

$$3x\,(\ell n\,x)^2=0$$

$x\neq 0$, לכן $\ell n\,x=0 \;\Rightarrow\; x=1$

$$(1,\ 0)$$

ב2 נקודות הקיצון וסוגן.

$$f'(x)=3(\ell n\,x)^2+3x\cdot 2\,\ell n\,x\cdot\frac{1}{x}$$

$$=3\,\ell n\,x\,(\ell n\,x+2)$$

$$\ell n\,x=0\Rightarrow x=1,\quad \ell n\,x=-2\Rightarrow x=e^{-2}$$

$$f\left(e^{-2}\right)=3e^{-2}\cdot(-2)^2=\frac{12}{e^2}\approx 1.62$$

$$\max\left(e^{-2},\ \tfrac{12}{e^2}\right),\ \min(1,\ 0)$$

שאלת בגרות פתורה – שטח מתחת לציר (ד)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 5

ד. חשבו את השטח המוגבל ע"י גרף $f'(x)$ וציר ה־x.

f' חותכת את ציר x ב־e^{-2} וב־1, וביניהן $f' < 0$ ← השטח **מתחת** לציר, ולכן מינוס:

$$S = -\int_{e^{-2}}^{1} f'(x)\,dx = -\left[f(1) - f\left(e^{-2}\right)\right]$$

$$S = -\left(0 - \frac{12}{e^2}\right) = \frac{12}{e^2} \approx 1.624$$

הטריק שחוזר

„שטח בין גרף f' לציר x" ←

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

משתמשים בערכי f שכבר חישבנו (קיצון, חיתוך).

יחידות שטח $\frac{12}{e^2}$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. תמיד מתחילים ב**תחום**: $x > 0$. פתרון מחוץ לתחום – פוסלים.
2. $\ell n\, x = 2 \leftarrow x = e^2$, לא $x = 2$ ולא $x = \ell n\, 2$.
3. $\left[(\ell n\, x)^2\right]' = 2\,\ell n\, x \cdot \frac{1}{x}$ – כלל השרשרת.
4. $\ell n\, x$ יכול להיות שלילי (כש־$0 < x < 1$) – זהירות בסימנים בטבלה.
5. שטח מתחת לציר x ← האינטגרל עם מינוס.
6. בטבלת הסימנים מסמנים גם את האסימפטוטה ($x = e^{1.5}$) – שם f לא מוגדרת.

בדיקה עצמית

1. פתרו: $\ell n\, x = 3$.
2. מהו תחום ההגדרה של $f(x) = \ell n(x-2)$?
3. גזרו: $f(x) = x \cdot \ell n\, x$, ומצאו את הקיצון.
4. חשבו: $\int_1^e \frac{1}{x}\, dx$.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $x = e^3 \approx \mathbf{20.09}$
2. $x - 2 > 0 \;\Rightarrow\; \mathbf{x > 2}$
3. $f'(x) = \ell n\, x + x \cdot \frac{1}{x} = \ell n\, x + 1$
   $\ell n\, x = -1 \Rightarrow x = e^{-1}$ ← $\min\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right)$
4. $\left[\ell n|x|\right]_1^e = 1 - 0 = \mathbf{1}$