סדרות

מצגת הסבר – סדרה חשבונית, סדרה הנדסית וסדרה הנדסית אין־סופית

מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35472 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?

שאלת הסדרות היא בדרך כלל **שאלה 1** בשאלון – לרוב שאלה מילולית עם **שתי סדרות**: אחת חשבונית ואחת הנדסית.

1. לזהות את סוג כל סדרה
2. לתרגם כל נתון ל**משוואה** עם a_1, d או q
3. למצוא איבר a_n, מקום n או סכום S_n
4. סדרה הנדסית **אין־סופית** מתכנסת – סכום S

המילים בשאלה מגלות את הסוג

„**יותר** ב־d מהקודם" ← מוסיפים מספר קבוע ← **חשבונית**

„גדול **פי** q מהקודם" ← כופלים במספר קבוע ← **הנדסית**

שני סוגי סדרות

סדרה חשבונית

כל איבר = הקודם **ועוד** מספר קבוע d (ההפרש).

$$4,\ 10,\ 16,\ 22,\ \ldots$$

$d = 10 - 4 = 6$

$d > 0$ ← עולה. $d < 0$ ← יורדת.

סדרה הנדסית

כל איבר = הקודם **כפול** מספר קבוע q (המנה).

$$48,\ -24,\ 12,\ -6,\ \ldots$$

$q = -24 : 48 = -\frac{1}{2}$

$q < 0$ ← האיברים מחליפים סימן: הסדרה **לא עולה ולא יורדת**.

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • סדרות

	סדרה חשבונית	סדרה הנדסית
כלל נסיגה	$a_1 = a,\quad a_{n+1} = a_n + d$	$a_1 = a,\quad a_{n+1} = a_n \cdot q$
איבר n-י	$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
סכום	$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ $S_n = \frac{n[2a_1 + (n-1)d]}{2}$	$S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1},\quad q \neq 1$
סדרה אין־סופית שסכומה מתכנס	-	$S = \frac{a_1}{1 - q}$

לזכור (לא בנוסחאון): סדרה הנדסית אין־סופית מתכנסת כאשר $-1 < q < 1$ $(q \neq 0)$.

שיטת הפתרון – שלב אחרי שלב

1. מזהים את **סוג** כל סדרה (יותר ב־ / פי).
2. רושמים כל נתון בעזרת a_1 ו־d (או a_1 ו־q): למשל $a_4 = a_1 q^3$.
3. פותרים את המשוואה (או מערכת של שתיים).
4. „סך הכול" ← סכום S_n. „בשבוע ה־n" ← איבר a_n.
5. בודקים: n טבעי, ובסדרה אין־סופית $-1 < q < 1$.

דוגמה: יחס בין איברים

„האיבר הרביעי גדול פי 3.375 מהראשון"

$$a_1 q^3 = 3.375\, a_1$$

$$q^3 = 3.375$$

$$q = \sqrt[3]{3.375} = 1.5$$

a_1 מצטמצם – לא צריך לדעת אותו!

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

שאלת בגרות פתורה – בקבוקים למחזור (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

תלמידי י"ב1 אספו בקבוקים במשך **5** שבועות. בכל שבוע אספו פי q מהשבוע שלפניו.
בשבוע הרביעי אספו פי 3.375 מבשבוע הראשון. **א.** מצאו את q.

„פי q" ← סדרה הנדסית:

$$a_4 = a_1 q^3 = 3.375\, a_1$$

$$q^3 = 3.375 \;\Rightarrow\; q = 1.5$$

$$q = 1.5$$

ב. בשבוע הראשון ובשבוע האחרון יחד אספו 2,425 בקבוקים. כמה אספו בשבוע הראשון?

השבוע האחרון הוא החמישי: $a_5 = a_1 q^4$

$$a_1 + a_1 q^4 = 2425$$

$$a_1\left(1 + 1.5^4\right) = 2425$$

$$a_1 \cdot 6.0625 = 2425 \;\Rightarrow\; a_1 = 400$$

400 בקבוקים

שאלת בגרות פתורה – בקבוקים למחזור (ג, ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 1

ג

י"ב2 אספו במשך 18 שבועות, בכל שבוע d בקבוקים **יותר** מהקודם. בשבוע השני – 230, ובסך הכול – 6,300. מצאו את d.

„יותר ב־d" ← חשבונית. $a_2 = a_1 + d = 230$, לכן $a_1 = 230 - d$.

$$S_{18} = \frac{18}{2}\left[2a_1 + 17d\right] = 6300$$

$$2a_1 + 17d = 700$$

$$2(230 - d) + 17d = 700$$

$$460 + 15d = 700 \;\Rightarrow\; d = 16$$

ד

על כל בקבוק קיבלו 0.3 ש"ח. המסיבה עולה 3,400 ש"ח. האם הסכום יספיק?

י"ב1 – סכום 5 איברים בסדרה ההנדסית:

$$S_5 = \frac{400\left(1.5^5 - 1\right)}{1.5 - 1} = 5275$$

$$5275 + 6300 = 11575$$

$$11575 \cdot 0.3 = 3472.5$$

כן – 3,472.5 ש"ח, יותר מ־3,400

שאלת בגרות פתורה – שתי סדרות (א)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

סדרה חשבונית A בת 57 איברים. נתון: $a_2 + a_4 = a_6$, והאיבר האחרון הוא 171. **א.** מצאו את d ואת a_1.

כותבים כל איבר בעזרת a_1 ו־d:

$$(a_1 + d) + (a_1 + 3d) = a_1 + 5d$$

$$2a_1 + 4d = a_1 + 5d \;\Rightarrow\; a_1 = d$$

האיבר האחרון הוא a_{57}:

$$a_{57} = a_1 + 56d = 171$$

מציבים $a_1 = d$:

$$d + 56d = 171$$

$$57d = 171 \;\Rightarrow\; d = 3$$

$$d = 3,\quad a_1 = 3$$

שאלת בגרות פתורה – שתי סדרות (ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד א' • שאלה 1

ב סדרה הנדסית אין־סופית B: $b_1 = a_6$ ו־$3b_3 = a_8$. מצאו את q.

$$a_6 = 3 + 5 \cdot 3 = 18$$

$$a_8 = 3 + 7 \cdot 3 = 24$$

לכן $b_1 = 18$, ו־$b_3 = 24 : 3 = 8$.

$$18q^2 = 8 \;\Rightarrow\; q^2 = \frac{4}{9}$$

$$q = \pm\frac{2}{3}$$

ג B לא עולה ולא יורדת. מצאו את סכום האיברים במקומות הזוגיים.

לא עולה ולא יורדת ← $q = -\frac{2}{3}$.

סדרה הנדסית עם $b_2 = 18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -12$ – $b_2,\ b_4,\ b_6, \ldots$ ומנה $q^2 = \frac{4}{9}$:

$$S = \frac{-12}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{-12}{\frac{5}{9}} = -21.6$$

$$-21.6$$

סדרת האיברים במקומות הזוגיים

בסדרה הנדסית עם מנה q, לוקחים רק את $b_2,\ b_4,\ b_6,\ \ldots$

$$b_4 = b_2 \cdot q \cdot q = b_2 \cdot q^2$$

כלומר מתקבלת **שוב סדרה הנדסית**:

- האיבר הראשון שלה: $b_2 = b_1 q$
- המנה שלה: q^2

אותו דבר במקומות האי־זוגיים: מתחילים ב־b_1, והמנה q^2.

למה q^2 ולא q?

בין b_2 ל־b_4 יש **שני** צעדים של כפל ב־q.

$$-12 \xrightarrow{\cdot q} 8 \xrightarrow{\cdot q} -\frac{16}{3}$$

✓ $-12 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{16}{3}$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. „יותר ב־" ← חשבונית (d). „פי" ← הנדסית (q).
2. באיבר ה־n החזקה היא $n-1$: $a_5 = a_1 q^4$.
3. „השבוע האחרון" – מבינים מהשאלה מה מספרו (5 שבועות ← a_5).
4. $q^2 = \frac{4}{9}$ ← **שתי** אפשרויות $\pm\frac{2}{3}$, ובוחרים לפי הנתונים.
5. „סך הכול" ← סכום S_n, לא a_n.
6. סכום אין־סופי – רק כש־$-1 < q < 1$.

במקומות הזוגיים: איבר ראשון b_2 ומנה q^2.

בדיקה עצמית

1. בסדרה חשבונית $a_1 = 7,\ d = 4$. מצאו את a_{15} ואת S_{15}.
2. באותה סדרה: איזה מקום תופס האיבר 99?
3. בסדרה הנדסית $a_1 = 5,\ q = 2$. מצאו את a_6 ואת S_6.
4. סדרה הנדסית אין־סופית: $a_1 = 18,\ q = -0.5$. מהו סכומה?

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $a_{15} = 7 + 14 \cdot 4 = \mathbf{63}$
$$S_{15} = \frac{15(7+63)}{2} = \mathbf{525}$$
2. $7 + 4(n-1) = 99 \ \Rightarrow \ n = \mathbf{24}$
3. $a_6 = 5 \cdot 2^5 = \mathbf{160}$
$$S_6 = \frac{5(2^6 - 1)}{2 - 1} = \mathbf{315}$$
4. $$S = \frac{18}{1 - (-0.5)} = \frac{18}{1.5} = \mathbf{12}$$