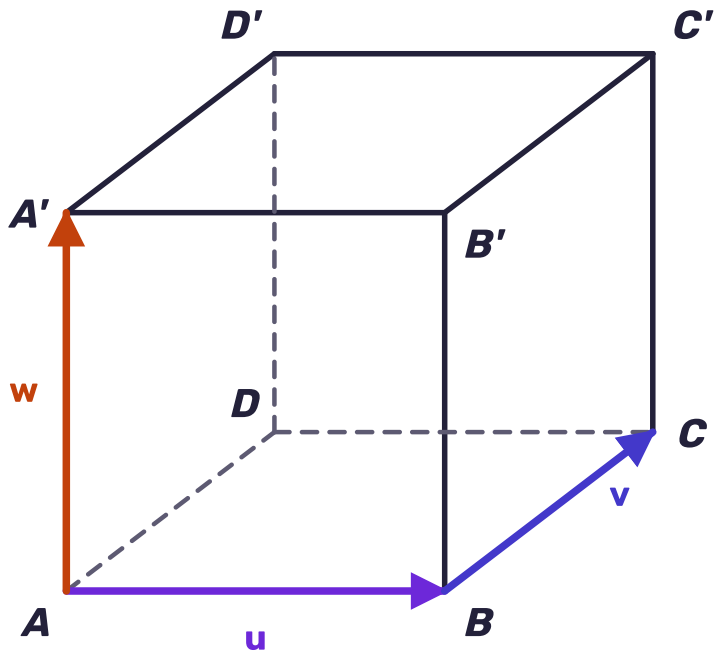
גאומטרייה במרחב – וקטורים

מצגת הסבר – וקטורים בתיבה ובפירמידה, מכפלה סקלרית, זוויות, אורכים ושטחים

מתמטיקה 4 יח״ל | שאלון 35472 | תכנית חדשה

האתר נבנה ע״י עדי והבינה

מה נלמד?



בשאלה נותנים גוף (תיבה, מנסרה, פירמידה) ושלושה וקטורים $\underline{u},\ \underline{v},\ \underline{w}$ שיוצאים מקודקוד. מבקשים:

1. להביע וקטורים בעזרת $\underline{u},\underline{v},\underline{w}$
2. **מכפלה סקלרית** – ולהוכיח **ניצבות**
3. **אורך** של וקטור / מקצוע
4. עבודה עם (x,y,z) **שיעורים**
5. **זווית**, **שטח** של משולש ו**נפח**

הבעת וקטור – „הולכים במסלול"

כדי להביע $\overrightarrow{XY}$ הולכים מ־X ל־Y **דרך מקצועות ידועים**, ומחברים:

$$\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'} = \underline{u} + \underline{v}$$

- הולכים **נגד** כיוון הווקטור ← מינוס: $\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$
- מקצועות מקבילים ושווים ← אותו וקטור: $\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = \underline{v}$
- אמצע קטע ← חצי: F אמצע BC ← $\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\underline{v}$
- „$\overrightarrow{A'E} = \frac{3}{4}\overrightarrow{A'C'}$" ← $\overrightarrow{A'E} = \frac{3}{4}\underline{u} + \frac{3}{4}\underline{v}$

וקטורים מקבילים

אם $\overrightarrow{EF} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ (k מספר) ← הווקטורים **מקבילים**.

למשל $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$ ← $EF \parallel BC$, ואורכו $\frac{3}{4}$ מאורך BC.

לזכור (לא בנוסחאון)

וקטורים בשיעורים

וקטור בין שתי נקודות

סוף פחות התחלה:

$$\overrightarrow{BC} = C - B$$

$B(1,-1,3),\ C(13,15,3)$:

$$\overrightarrow{BC} = (12,\ 16,\ 0)$$

נקודה = נקודה + וקטור

$$F = E + \overrightarrow{EF}$$

$E(5,1,6)$, $\overrightarrow{EF} = (9,12,0)$:

$$F = (14,\ 13,\ 6)$$

כפל במספר

$$\tfrac{3}{4} \cdot (12,16,0) = (9,12,0)$$

כופלים כל שיעור.

אמצע קטע

$$M = \left(\tfrac{x_1+x_2}{2},\ \tfrac{y_1+y_2}{2},\ \tfrac{z_1+z_2}{2}\right)$$

לזכור (לא בנוסחאון)

הנוסחאות מהנוסחאון

נוסחאון • וקטורים

$\underline{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\underline{v} = (v_1, v_2, v_3)$

אורך:

$$|\underline{u}| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$$

$$|\underline{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + (u_3)^2}$$

מכפלה סקלרית:

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = |\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \cos\alpha$$

זווית בין וקטורים:

$$\cos\alpha = \frac{\underline{u} \cdot \underline{v}}{|\underline{u}| \cdot |\underline{v}|}$$

נוסחאון • שטח וגופים

שטח משולש (α – הזווית בין b ל־c):

$$S = \frac{1}{2} \cdot b \cdot c \cdot \sin\alpha$$

נפח מנסרה ונפח פירמידה (S – שטח הבסיס, h – גובה הגוף):

$$V = S \cdot h \qquad V = \frac{S \cdot h}{3}$$

לזכור (לא בנוסחאון): וקטורים מאונכים כאשר המכפלה הסקלרית שלהם היא 0:

$$\underline{u} \perp \underline{v} \iff \underline{u} \cdot \underline{v} = 0$$

מכפלה סקלרית – הכלים

בתיבה ובקובייה

המקצועות שיוצאים מקודקוד **מאונכים** זה לזה:

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=\underline{u}\cdot\underline{w}=\underline{v}\cdot\underline{w}=0$$

ו־$\underline{u}\cdot\underline{u}=|\underline{u}|^2$.

אורך של וקטור מורכב

מעלים בריבוע (כמו בכפל מקוצר):

$$|\underline{u}+\underline{v}|^2=|\underline{u}|^2+2\,\underline{u}\cdot\underline{v}+|\underline{v}|^2$$

ובסוף מוציאים שורש.

מכפלה של שני ביטויים

פותחים סוגריים – כל איבר בכל איבר:

$$\begin{aligned}&\left(-\tfrac{1}{4}\underline{u}+\tfrac{1}{4}\underline{v}+\underline{w}\right)\cdot\left(\underline{u}+\underline{v}\right)\\&=-\tfrac{1}{4}|\underline{u}|^2+\tfrac{1}{4}|\underline{v}|^2\end{aligned}$$

(המכפלה של וקטורים מאונכים היא 0)

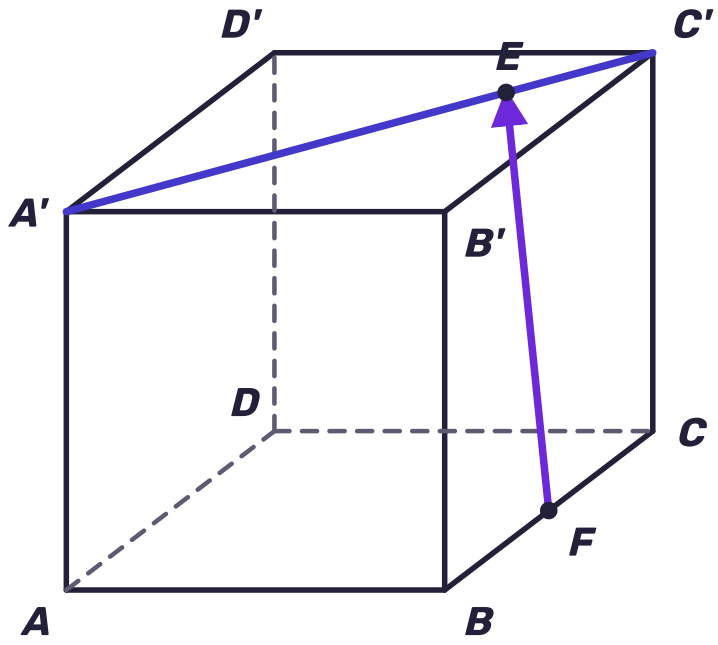
זווית לא ידועה

כשהזווית בין $\underline{u}$ ל־$\underline{v}$ נתונה (למשל 60°):

$$\underline{u}\cdot\underline{v}=|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|\cdot\cos 60^\circ$$

שיטת הפתרון – שלב אחרי שלב

1. מסמנים על הסרטוט את $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ ואת הנקודות (אמצע, יחס).
2. מביעים כל וקטור במסלול של מקצועות ידועים.
3. רושמים את המכפלות הידועות: אורכים, ניצבות (מכפלה 0), זוויות.
4. **ניצבות** ← מראים שהמכפלה הסקלרית היא 0.
   אורך ← מעלים בריבוע ומוציאים שורש.
5. **זווית** ← $\cos\alpha$. **שטח** ← $\frac{1}{2}bc\sin\alpha$, או בסיס כפול גובה חלקי 2 כשיש ניצבות.



בגרות קיץ תשפ״ו (2026) – מועד ב׳ • שאלה 2

שאלת בגרות פתורה – הבעת וקטורים (א)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

$ABCDA'B'C'D'$ תיבה שבסיסה ריבוע $ABCD$ שאורך צלעו 4. $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{BC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AA'}=\underline{w}$. E על $A'C'$ כך ש־$\overrightarrow{A'E}=\frac{3}{4}\overrightarrow{A'C'}$, ו־$F$ אמצע BC. **א.** הביעו את $\overrightarrow{A'E}$ ואת $\overrightarrow{FE}$.

$$\overrightarrow{A'C'}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{B'C'}=\underline{u}+\underline{v}$$

$$\overrightarrow{A'E}=\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}$$

מ־F ל־E דרך B, A ו־A' ($\overrightarrow{FB}=-\frac{1}{2}\underline{v}$):

$$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'E}$$

$$=-\frac{1}{2}\underline{v}-\underline{u}+\underline{w}+\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}$$

$$\overrightarrow{FE}=-\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\underline{w}$$

שאלת בגרות פתורה – אורכים (ב, ג)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

ב מצאו את אורך $\overrightarrow{A'E}$.

בסיס ריבוע: $\underline{u} \perp \underline{v}$, $|\underline{u}| = |\underline{v}| = 4$:

$$|\overrightarrow{A'C'}|^2 = |\underline{u}|^2 + 2\,\underline{u}\cdot\underline{v} + |\underline{v}|^2$$

$$= 16 + 0 + 16 = 32 \;\Rightarrow\; |\overrightarrow{A'C'}| = 4\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{A'E}| = \frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \approx 4.24$$

ג נתון $|\overrightarrow{FE}| = |\overrightarrow{A'E}|$. הוכיחו שהתיבה היא קובייה.

בתיבה כל המכפלות בין $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ הן 0. $|\underline{w}| = h$:

$$|\overrightarrow{FE}|^2 = \frac{1}{16}|\underline{u}|^2 + \frac{1}{16}|\underline{v}|^2 + |\underline{w}|^2$$

$$= 1 + 1 + h^2 = 2 + h^2$$

$$2 + h^2 = 18 \;\Rightarrow\; h = 4$$

כל המקצועות 4 ← קובייה

שאלת בגרות פתורה – ניצבות ושטח (ד)

בגרות קיץ תשפ"ו (2026) – מועד ב' • שאלה 2

ד. (1) הראו ש־$\overrightarrow{FE} \perp \overrightarrow{A'C'}$. (2) חשבו את שטח המשולש $A'FC'$.

$$\overrightarrow{FE}\cdot\overrightarrow{A'C'} = \left(-\frac{1}{4}\underline{u}+\frac{1}{4}\underline{v}+\underline{w}\right)\cdot(\underline{u}+\underline{v})$$

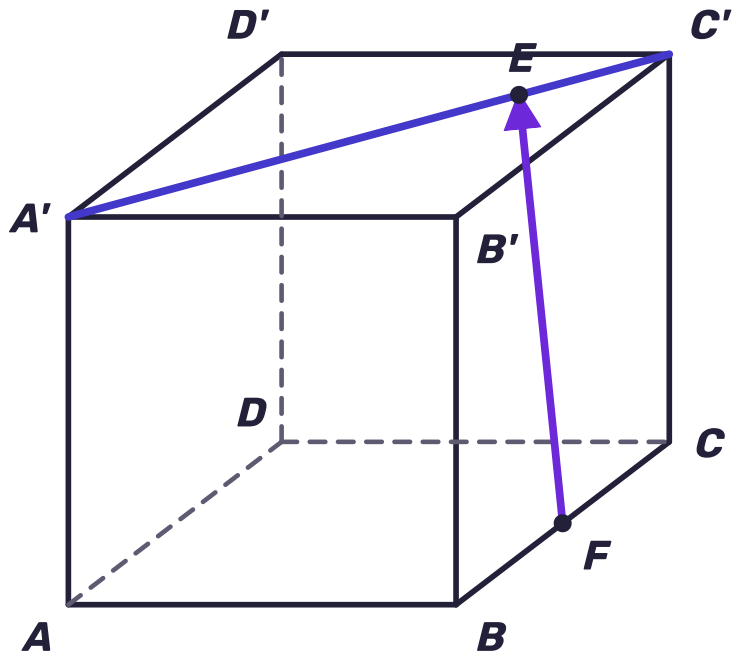
$$= -\frac{1}{4}|\underline{u}|^2+\frac{1}{4}|\underline{v}|^2 = -4+4 = 0$$

המכפלה 0 ← מאונכים

E על $A'C'$ ו־$FE \perp A'C'$ ← FE הוא **הגובה** לצלע $A'C'$:

$$S_{A'FC'} = \frac{4\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{2}}{2} = 12$$

12 יחידות שטח



שאלת בגרות פתורה – פירמידה (א, ב)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 2

$SABC$ פירמידה. $\overrightarrow{AB}=\underline{u}$, $\overrightarrow{AC}=\underline{v}$, $\overrightarrow{AS}=\underline{w}$. $\overrightarrow{SF}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{SE}=\frac{3}{4}\overrightarrow{SB}$.

א. הביעו את $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{SF}$, $\overrightarrow{SE}$.

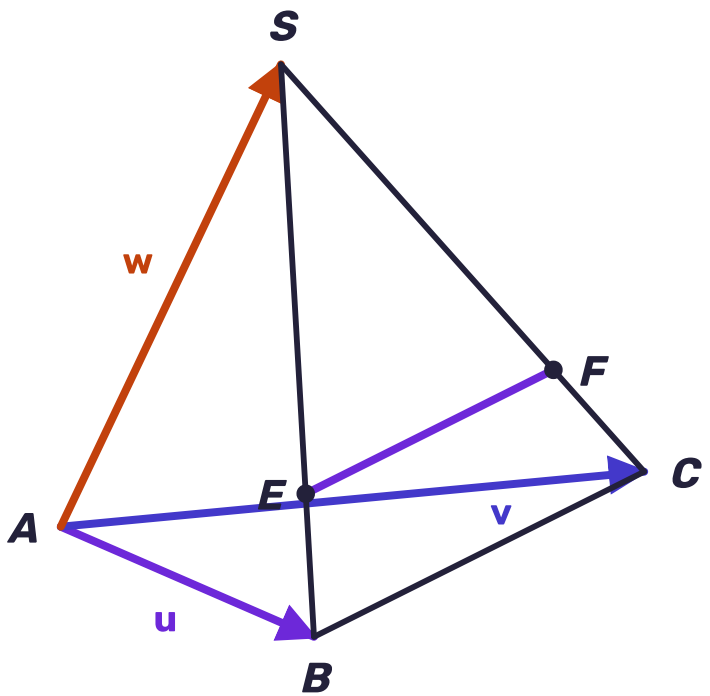
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=-\underline{u}+\underline{v}$$

$$\overrightarrow{SF}=\frac{3}{4}(-\underline{w}+\underline{v}),\quad \overrightarrow{SE}=\frac{3}{4}(-\underline{w}+\underline{u})$$

ב. הביעו את $\overrightarrow{EF}$, והראו ש־$EF \parallel BC$.

$$\overrightarrow{EF}=-\overrightarrow{SE}+\overrightarrow{SF}=-\frac{3}{4}\underline{u}+\frac{3}{4}\underline{v}=\frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$

כפולה במספר ← $EF \parallel BC$



שאלת בגרות פתורה – פירמידה בשיעורים (ג–ה)

בגרות קיץ תשפ"ה (2025) – מועד ב' • שאלה 2

$A(4,12,3)$, $B(1,-1,3)$, $C(13,15,3)$, $E(5,1,6)$. **ג.** מצאו את $\overrightarrow{BC}$ ו־$\overrightarrow{EF}$. **ד.** מצאו את F.

$$\overrightarrow{BC} = C - B = (12,16,0)$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{3}{4}(12,16,0) = (9,12,0)$$

$$F = E + \overrightarrow{EF} = (14,13,6)$$

ה. מצאו את $\sphericalangle EAF$ ואת שטח המשולש EAF.

$$\overrightarrow{AE} = (1,-11,3),\quad \overrightarrow{AF} = (10,1,3)$$

$$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF} = 10 - 11 + 9 = 8$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \sqrt{131},\quad |\overrightarrow{AF}| = \sqrt{110}$$

$$\cos\alpha = \frac{8}{\sqrt{131}\cdot\sqrt{110}} \approx 0.0666 \;\Rightarrow\; \alpha \approx 86.18^\circ$$

$$S = \frac{\sqrt{131}\cdot\sqrt{110}\cdot\sin 86.18^\circ}{2} \approx 59.89$$

$\sphericalangle EAF \approx 86.18^\circ$

יחידות שטח $S_{EAF} \approx 59.89$

שימו לב – הטעויות הנפוצות

1. הליכה נגד כיוון החץ ← מינוס ($\overrightarrow{BA} = -\underline{u}$).
2. $|\underline{u}| + |\underline{v}| \neq |\underline{u} + \underline{v}|$ – מעלים בריבוע!
3. וקטור בין נקודות: **סוף פחות התחלה**.
4. ניצבות מוכיחים רק כשהמכפלה הסקלרית היא 0 – לא לפי הסרטוט.
5. בפירמידה (לא בתיבה) המקצועות לא בהכרח מאונכים – משתמשים רק במה שנתון.
6. „הוכיחו" – מסיימים במשפט: „לכן התיבה היא קובייה".

בדיקה עצמית

1. חשבו את האורך של $\underline{u} = (1, 2, 2)$.
2. האם $\underline{a} = (2, -1, 3)$ ו־$\underline{b} = (1, 5, 1)$ מאונכים?
3. מצאו את הזווית בין $(1, 0, 1)$ ל־$(0, 1, 1)$.
4. בקובייה שמקצועה 2 (עם $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w}$ כמו בשאלה): מצאו את $|\underline{u} + \underline{v} + \underline{w}|$.

התשובות (לפתוח אחרי שפתרתם)

1. $\sqrt{1+4+4} = \mathbf{3}$
2. $2 - 5 + 3 = 0 \leftarrow$ **כן**, מאונכים
3. $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \leftarrow \mathbf{60^\circ}$
4. $4 + 4 + 4 = 12 \leftarrow \sqrt{12} = \mathbf{2\sqrt{3}} \approx 3.46$